

Geradlinige Bewegungen

Teil 1

Gleichförmige Bewegungen

Datei Nr. 91111

Friedrich W. Buckel

Stand : 22. September 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	Grundlagen der gleichförmigen Bewegung	3
2	Gleichförmige Bewegung mit Startposition	6
3	Achtung Gegenverkehr!	8
4	Bewegungsdiagramme	13

Hinweise

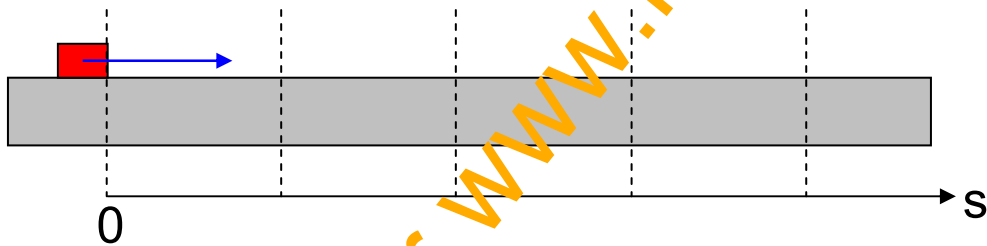
Es gibt einen Text 12185 „Bewegungsalgebra“ mit vielen Aufgaben zu solchen „gleichzeitigen Bewegungen“ zweier Fahrzeuge. Es ist im Grund eine Anwendung der Geradengleichungen.

1 Grundlagen der gleichförmigen Bewegung

Definition:

Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn der bewegte Körper in gleichen Zeitspannen gleich lange Strecken zurücklegt.

Im Unterricht führt man dazu in aller Regel Experimente mit einer Fahrbahn aus. Darauf befindet sich ein Wagen, der diese gleichförmige Bewegung machen soll. Dies geht nun experimentell gar nicht so einfach. Zum einen muß man ihn aus der Ruhe heraus erst einmal kurzzeitig beschleunigen, damit er überhaupt in Bewegung kommt. Zum andern muß man die Reibung ausschalten. Dazu gibt man der Fahrbahn ein so minimales Gefälle, daß die daraus entstehende Beschleunigungskraft sich gerade mit der Reibungskraft ausgleicht. Mit den heutigen Luftkissenfahrbahnen ist diese Reibung nur noch ganz minimal vorhanden, hat man eine Fahrbahn mit einem kleinen Wagen mit Rädern, dann muß man schon genauer justieren um diese Reibung zu kompensieren. Die Beschleunigungskraft kann man entweder mit einer kleinen Feder am Startpunkt erzeugen, oder mit einem zu Boden ziehenden Körper der über eine Schnur und eine Umlenkrolle mit dem Fahrzeug verbunden ist.



Diese Skizze zeigt, wie man verschiedene Fahrstrecken abgreift und die zugehörige Fahrzeit stoppt, vorausgesetzt, ab $s = 0$ ist die Bewegung bereits gleichförmig, d.h. die am Start nötige Antriebskraft ist nicht mehr wirksam.

Dann füllt man eine Tabelle aus und trägt Strecken und Fahrzeiten ein, etwa so:

Weg s	Zeit t	$\frac{s}{t}$
0,2 m	0,8 s	0,25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
0,4 m	1,6 s	0,25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
0,6 m	2,4 s	0,25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
0,8 m	3,2 s	0,25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
1,0 m	4,0 s	0,25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Auswertung wurde in der dritten Spalte vorgenommen. Dort berechnet man den Quotienten aus s und t . In unserem ideal gemachten Beispiel ist dieser immer konstant.

Ist der Quotient zweier Größen konstant, dann nennt man diese Größen **proportional**.

Hier sind also s und t proportional. Man schreibt dies so: $s \sim t$.

Der konstante Quotient ist charakteristisch für diese Bewegung. Man nennt ihn die Geschwindigkeit v .

$$v = \frac{s}{t}$$

Wenn man die Definition genau durchliest, dann darf man aber auch Strecken messen, die nicht am Startpunkt beginnen, etwa vom 2. bis zum 4. Strich unserer Abbildung. Die Auswertung sieht dann so aus:

Streckenlänge: Von Marke $s_1 = 0,2 \text{ m}$ bis $s_3 = 0,6 \text{ m}$: $\Delta s = s_3 - s_1 = 0,4 \text{ m}$.

Zugehörige Zeitspanne: $\Delta t = 1,6 \text{ s}$

Auch hier wird der Quotient berechnet: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \text{ m}}{1,6 \text{ s}} = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Man muss genau unterscheiden zwischen Zeitpunkten und den dazwischen liegenden **Zeitspannen**.

Und zwischen Positionen und den dazwischen liegenden **Wegstrecken**.

Merke:

s bezeichnet die **Position**, an dem sich ein Körper befindet.

t bezeichnet den **Zeitpunkt**, an dem er sich in s befindet.

Δs bezeichnet eine zurückgelegte **Wegstrecke**.

Δt bezeichnet eine **Zeitspanne**.

Zusammenhang: $\Delta s = s_2 - s_1$ und $\Delta t = t_2 - t_1$.

Für eine gleichförmige Bewegung muß gelten:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{konstant} \quad (1)$$

Man darf s und Δs nicht verwechseln, und auch nicht t und Δt .

Nur dann ist $\Delta s = s$, wenn die Strecke bei der Marke $s_1 = 0$ beginnt.

Nur dann ist $\Delta t = t$, wenn die Zeitspanne beim Zeitpunkt $t_1 = 0$ beginnt.

Dann kann man auch schreiben $\frac{s}{t} = \text{konstant}$. (2)

Ein Beispiel für eine gleichförmige Bewegung, wo (1) gilt, aber nicht (2):

Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe heraus 5 Sekunden lang beschleunigt und erreicht dann die Geschwindigkeit $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, dies geschieht auf einer 8 m langen Strecke. Ab da fährt es gleichförmig weiter, behält also seine Geschwindigkeit bei. Das heißt, es legt pro Sekunde immer 3 m zurück, also in jeder folgenden Zeitspanne von 5 Sekunden Dauer immer 15 m. Dies ergibt diese Tabelle:

	s	$\frac{s}{t}$
0	0	---
5 s	8 m	$1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
10 s	23 m	$2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
15 s	38 m	$2,53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
usw.		

Durch die anfängliche Beschleunigungsphase sind s und t dort nicht mehr proportional, denn in jeder Sekunde wird das Fahrzeug schneller.

$\frac{s}{t}$ ist also hier nicht konstant.

Aber ab der 5. Sekunde ist bei $\Delta t = 5 \text{ s}$ stets $\Delta s = 15 \text{ m}$.

Es gilt also hier die Proportionalität zwischen Δs und Δt .

Erst ab der 5. Sekunde ist die Bewegung gleichförmig mit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Aufgaben zur gleichförmigen Bewegung:

- (1) Ein Fahrzeug fährt gleichmäßig mit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Wie weit fährt es in 2 Minuten?

$$\text{Aus } v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 120 \text{ s} = 1800 \text{ m} = 1,8 \text{ km}$$

Wie lange braucht dieses Fahrzeug für 3 km?

$$\text{Aus } v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{3000 \text{ m}}{15 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 200 \text{ s}$$

Man achte auf die Rechnung mit den Einheiten:

$$\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \text{m} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \text{s}$$

- (2) Ein Fahrzeug benötigt für 350 m genau 4,2 s. Wie lange benötigt es für 500 m?

Lösung: Wir setzen gleichförmige Bewegung voraus und berechnen zuerst die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{350 \text{ m}}{4,2 \text{ s}} = \frac{3500 \text{ m}}{42 \text{ s}} = \frac{500 \text{ m}}{6 \text{ s}} \approx 83,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Und nun die Fahrzeit für 500 m: $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{500 \text{ m}}{\frac{500 \text{ m}}{6 \text{ s}}} = 500 \cdot \frac{6}{500} \text{ s} = 6 \text{ s}.$

- (3) Ein Fahrzeug fährt gleichförmig mit $v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie weit fährt es in 15 Sekunden?

Nun müssen wir zuerst lernen, wie man die Einheiten umrechnet:

WISSEN: Umrechnung von $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und umgekehrt:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bzw.

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Also folgt: $v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{108}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Daher folgt: $s = v \cdot t = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ s} = 450 \text{ m}.$

2 Gleichförmige Bewegung mit Startposition

Im Abschnitt 1 haben wir den Weg immer ab einer bestimmten Stelle 0 aus gemessen. Nun aber stellen wir uns eine Wegstrecke vor, auf der zuerst beschleunigt wird, dann erst fährt er gleichförmig weiter:



Das ist die allgemeine Fragestellung:

Das Fahrzeug sei bei $s = 0$ in Ruhe und wird dann beschleunigt. Bei $s = s_1$ habe es die Geschwindigkeit v erreicht und fährt ab da gleichförmig weiter. Nach welcher Zeit erreicht es die Marke s_2 ?

Beispiel 1

Ein Fahrzeug startet bei $x = 0$ und hat nach 0,5 m die Geschwindigkeit $v = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erreicht.

Dann fährt es gleichförmig weiter. Nach welcher Zeit erreicht es die Marke $s_2 = 2,5 \text{ m}$?

Lösung:

Wir berechnen die Wegstrecke zwischen s_1 und s_2 durch Subtraktion:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

Für die gleichmäßige Bewegung gilt: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Daraus erhält man $\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2 \text{ m}}{0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2,5 \text{ s}$

Hinweis: Man darf nicht einfach s für den zurückgelegten Weg schreiben, denn s gibt die **momentane Position**, also eine Wegmarke des Fahrzeugs an, genauso wie t den **Zeitpunkt** angibt, an dem das Fahrzeug die Position s einnimmt. Die Zeitspanne ist Δt .

Beispiel 2

Ein Fahrzeug beschleunigt 5 Sekunden lang und erreicht nach 8 m die Geschwindigkeit $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ab dann fährt es mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

- Wo befindet sich das Fahrzeug nach 20 Sekunden?
- Wann hat das Fahrzeug insgesamt 80 m zurückgelegt?

Lösung:

Die gleichförmige Bewegung beginnt an der Stelle $s_0 = 8 \text{ m}$.

Daher gilt für die Berechnung der Endposition s_1 die Formel:

$$s = s_0 + v \cdot \Delta t$$

Diese Formel berücksichtigt die zuvor von 0 bis s_0 zurückgelegte Wegstrecke.

s_0 ist also die Startposition für die gleichförmige Bewegung. Und wir müssen Δt für die gleichförmige Bewegung verwenden, weil wir die Fahrzeit auch erst ab s_0 messen.

Nun zur Rechnung:

- Es ist $s_0 = 8 \text{ m}$, $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\Delta t = 20 \text{ s} - 5 \text{ s} = 15 \text{ s}$

Also folgt: $s_1 = 8 \text{ m} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ s} = 8 \text{ m} + 45 \text{ m} = 53 \text{ m}$

- Die gesamte Wegstrecke sei nun $\Delta s = 80 \text{ m}$. Subtrahieren wir davon die 8 m lange Beschleunigungsstrecke, dann bleibt für die gleichförmige Bewegung eine Strecke von 72 m.

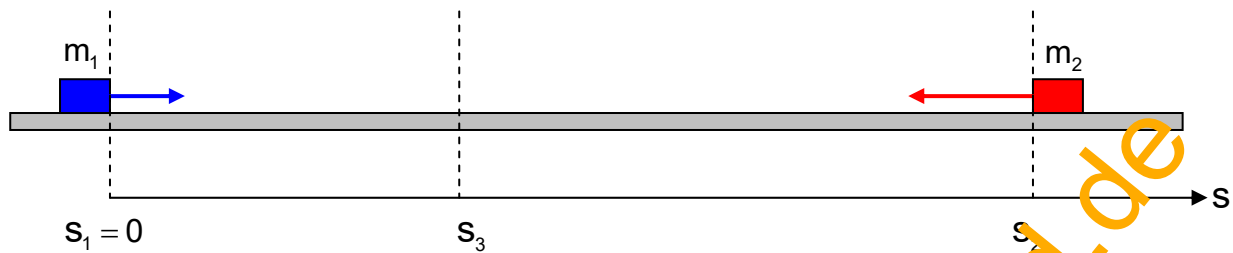
Wir verwenden unsere Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{72 \text{ m}}{3 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 24 \text{ s}$

Dies ist nun die reine Fahrzeit ab s_1 . Rechnen wir die 5s Startphase dazu, erhalten wir das

Ergebnis: $t = t_0 + \Delta t = 5 \text{ s} + 24 \text{ s} = 29 \text{ s}$.

3 Achtung Gegenverkehr !!

Die hier behandelten vier Beispiele werden ab Seite 15 nochmals graphisch gelöst.



Beispiel 1

Das Fahrzeug mit der Masse m_1 startet an der Stelle $s_1 = 0$ (m) mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Zugleich startet das Fahrzeug mit der Masse m_2 an der Stelle $s_2 = 200$ (m) und fährt in entgegengesetzter Richtung auf m_1 zu. An welcher Stelle und nach welcher Zeit treffen sie aufeinander?

Lösung:

Zur Beschreibung der Positionen der Fahrzeuge benötigt man eine s-Achse. Damit folgt:

Für m_1 : $s(t) = v_1 \cdot t$ (1) m_1 startet bei $s = 0$ (m).

Für m_2 : $s(t) = s_2 - v_2 \cdot t$ (2) m_2 startet bei $s_2 = 200$ (m).

Das Minuszeichen in (2) wird benötigt, weil m_2 entgegen der Weg-Achse fährt, also wird die s-Koordinate immer kleiner.

Zum Zeitpunkt t_3 stoßen die Fahrzeuge an der Stelle s_3 zusammen.

Dann gilt für m_1 : $s_3 = v_1 \cdot t_3$

und für m_2 : $s_3 = s_2 - v_2 \cdot t_3$

Gleichsetzen: $v_1 \cdot t_3 = s_2 - v_2 \cdot t_3$ | $+ v_2 \cdot t_3$
 $v_1 \cdot t_3 + v_2 \cdot t_3 = s_2$ | t_3 ausklammern
 $(v_1 + v_2) \cdot t_3 = s_2$ | $:(v_1 + v_2)$
 $t_3 = \frac{s_2}{v_1 + v_2}$ bzw. $t_3 = \frac{200 \text{ m}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 40 \text{ s}$.

Das heißt: Nach 40 Sekunden stoßen sie zusammen.

Kontrolle: An welcher Stelle befinden sich die beiden Körper nach 40 s?

m_1 : $s_3 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40 \text{ s} = 80 \text{ m}$

m_2 : $s_3 = 200 \text{ m} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40 \text{ s} = 200 \text{ m} - 120 \text{ m} = 80 \text{ m}$.

Wir sehen also: Nach 40 s und bei $s_3 = 80 \text{ m}$ treffen beide aufeinander.

Auf Seite 16 steht dazu eine graphische Lösung.

Beispiel 2

Nun lassen wir die beiden Fahrzeuge zeitversetzt abfahren. Wir sehen bei beiden von einer Beschleunigungsphase beim Start ab und lassen sie gleich mit ihren Geschwindigkeiten losfahren.

Fahrzeug 1 (m_1) starte zur Zeit $t_1 = 0$ im Punkt $s_1 = 0$ mit $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Fahrzeug 2 (m_2) starte zur Zeit $t_2 = 10\text{s}$ im Punkt $s_0 = 810\text{ m}$ mit $v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Beide Fahrzeuge fahren aufeinander zu. Wann und wo treffen sie sich?

Lösung:

Bewegungsgleichung von m_1 : $s = v_1 \cdot t$ für $t \geq 0$

Bewegungsgleichung von m_2 : $s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$ für $t \geq t_2 = 10\text{ s}$

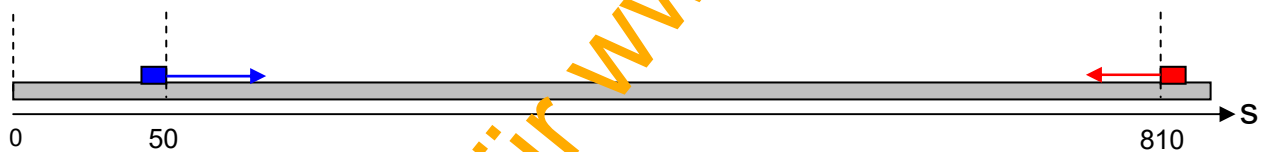
Hier ist etwas Besonderes passiert. Weil das 2. Fahrzeug erst 10 s später abfährt, müssen wir seine Fahrzeit durch Subtraktion von $t_2 = 10\text{ s}$ berechnen.

Wenn also das 1. Fahrzeug schon $t = 25\text{ s}$ fährt, dann fährt das 2. Fahrzeug erst $25\text{ s} - 10\text{ s} = 15\text{ s}$.

Spiele wir einige Zeitpunkte durch (die Skizzen sind nicht maßstäblich):

Zum Zeitpunkt $t = 10\text{ s}$ hat sich m_1 um $s_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\text{s} = 50\text{ m}$ nach rechts bewegt,

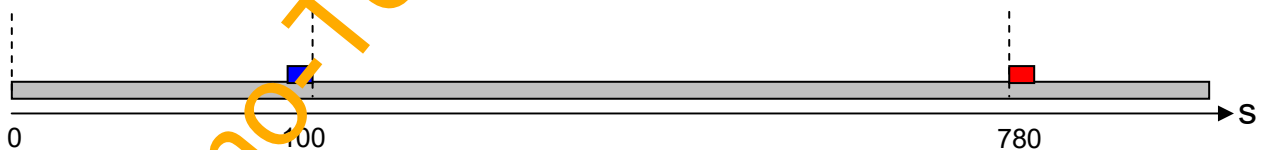
während m_2 gerade erst losfährt, also noch auf seinem Startplatz bei $s_2 = 810\text{ m}$ steht:



Zum Zeitpunkt $t = 20\text{ s}$ hat sich m_1 um $\Delta s = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20\text{s} = 100\text{ m}$ nach rechts bewegt und

während m_2 gerade erst 10 s lang gefahren ist und somit die Strecke $\Delta s = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\text{s} = 30\text{ m}$

zurückgelegt hat, also bei der Marke $s = 810\text{ m} - 30\text{ m} = 780\text{ m}$ angekommen ist:

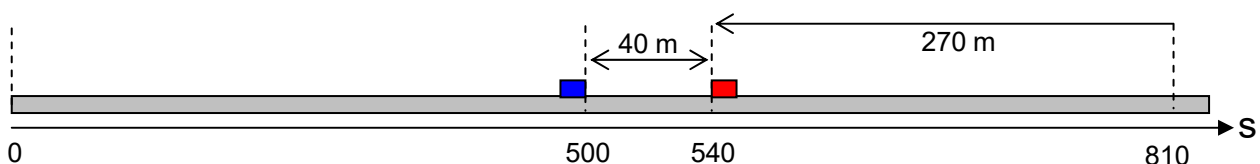


Zum Zeitpunkt $t = 100\text{ s}$ hat sich m_1 um $s_3 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 100\text{s} = 500\text{ m}$ nach rechts bewegt, während

m_2 erst 90 s gefahren ist und somit die Strecke $\Delta s = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 90\text{s} = 270\text{ m}$ zurückgelegt hat, also bei

der Marke $s_3 = 810\text{ m} - 270\text{ m} = 540\text{ m}$ angekommen ist:

Die beiden Fahrzeuge sind nun noch 40 m voneinander entfernt.



Nun wollen wir den Zeitpunkt des Zusammentreffens berechnen.

Aufeinandertreffen an der Stelle s zur Zeit t bedeutet

für m_1 :	$s = v_1 \cdot t$
für m_2 :	$s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$

Gleichsetzen:

$$v_1 \cdot t = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$$

$$v_1 \cdot t = s_0 - v_2 \cdot t + v_2 \cdot t_2$$

$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = s_0 + v_2 \cdot t_2$$

$$(v_1 + v_2) \cdot t = s_0 + v_2 \cdot t_2$$

$$t = \frac{s_0 + v_2 \cdot t_2}{v_1 + v_2}$$

Mit Zahlen:

$$t = \frac{810 \text{ m} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{840 \text{ m}}{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 105 \text{ s}$$

Und wo treffen sie aufeinander? Wir rechnen diese Stelle für beide Körper mit ihren Bewegungsgleichungen aus:

$$\text{Für } m_1 : \quad s = v_1 \cdot t = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 105 \text{ m} = 525 \text{ m}$$

$$\text{Für } m_2 : \quad s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2) = 810 \text{ m} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} (105 \text{ s} - 10 \text{ s}) = 810 \text{ m} - 3 \cdot 95 \text{ m} = 525 \text{ m}$$

Siehe auch die graphische Lösung dazu auf Seite 17.

Beispiel 3

Man kann natürlich auch zwei Fahrzeuge hintereinander her fahren lassen:

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nach $t_2 = 20 \text{ s}$ startet an derselben Stelle ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein?
(Wir denken uns die Körper punktförmig.)

Lösung:

Anfänger können wie in Beispiel 2 einige Momentaufnahmen berechnen, also etwa „Wo befinden sich die Körper nach 10 s, 20 s, 100 s usw.“

Für die Lösung wollen wir professioneller vorgehen und die beiden Bewegungsgleichungen anschreiben:

$$\text{Für } m_1: \quad s_1 = v_1 \cdot t \quad \text{für } t \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Für } m_2: \quad s_2 = v_2 \cdot (t - t_2) \quad \text{für } t \geq t_2 = 20 \text{ s} \quad (2)$$

Die Fahrzeit des 2. Körpers ist damit stets um $\Delta t = 20 \text{ s}$ verkürzt.

Für das Zusammentreffen setzen wir gleich. Die zugehörige Zeit nenne ich t_3 :

$$v_1 \cdot t_3 = v_2 \cdot t_3 - v_2 \cdot t_2$$

Nun stellen wir die Gleichung so um, daß die gesuchte Zeit t_3 rechts steht und t_2 links:

$$v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot t_3 - v_1 \cdot t_3$$

$$v_2 \cdot t_2 = (v_2 - v_1) \cdot t_3$$

$$t_3 = \frac{v_2 \cdot t_2}{v_2 - v_1}$$

Mit Zahlen ergibt dies: $t_3 = \frac{6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ s}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 60 \text{ s}$

Der von beiden zurückgelegte Weg bis dahin:

$$\text{Für } m_1 \text{ berechnet:} \quad s_1 = v_1 \cdot t = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60 \text{ s} = 240 \text{ m}$$

$$\text{Für } m_2 \text{ berechnet:} \quad s_2 = v_2 \cdot (t - t_2) = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 40 \text{ s} = 240 \text{ m}$$

Also treffen sie bei der Wegmarke $s_3 = 240 \text{ m}$ zusammen.

Siehe auch die graphische Lösung dazu auf Seite 18.

Beispiel 4

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nach $t_2 = 20 \text{ s}$ startet ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in derselben Fahrtrichtung, seine Startposition befindet sich jedoch $s_0 = 600 \text{ m}$ vor m_1 .

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein?
(Wir denken uns die Körper punktförmig.)

Lösung:

Jetzt ändert sich die Bewegungsgleichung von m_1 , weil dieser beim Start schon einen Vorsprung von $s_0 = 600 \text{ m}$ hat. Also gilt

$$\text{Für } m_1: \quad s = s_0 + v_1 \cdot t \quad \text{für } t \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Für } m_2: \quad s = v_2 \cdot (t - t_2) \quad \text{für } t \geq t_2 = 20 \text{ s} \quad (2)$$

$$\text{Gleichsetzen ergibt:} \quad s_0 + v_1 \cdot t = v_2 \cdot (t - t_2)$$

$$s_0 + v_1 \cdot t = v_2 \cdot t - v_2 \cdot t_2$$

$$t \text{ nach rechts:} \quad s_0 + v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot t - v_1 \cdot t$$

$$s_0 + v_2 \cdot t_2 = (v_2 - v_1) \cdot t$$

$$t = \frac{s_0 + v_2 \cdot t_2}{v_2 - v_1}$$

$$\text{Mit Zahlen ergibt dies:} \quad t = \frac{600 \text{ m} + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ s}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{720 \text{ m}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 360 \text{ s}$$

Und nun die Stelle, an der sie sich treffen:

$$\text{Für } m_1 \text{ berechnet:} \quad s = s_0 + v_1 \cdot t = 600 \text{ m} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 360 \text{ s} = 2040 \text{ m}$$

$$\text{Für } m_2 \text{ berechnet:} \quad s = v_2 \cdot (t - t_2) = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 340 \text{ s} = 2040 \text{ m}$$

Man erhält natürlich wieder dieselbe Wegmarke. Es genügt also die Berechnung für einen Körper. Dennoch ist diese doppelte Rechnung eine Art Probe, ob man keinen Fehler gemacht hat.

4 Bewegungsdiagramme

4.1 Diagramme zur gleichförmigen Bewegung.

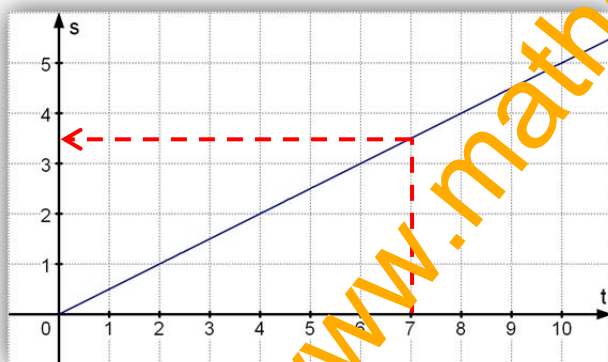
Die Berechnung der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung geschieht durch $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Wenn die Bewegung zur Zeit $t = 0$ bei $s = 0$ startet, lautet diese Gleichung $v = \frac{s}{t}$ bzw. $s = v \cdot t$.

Oft verwendet man die funktionale Schreibweise: $s(t) = v \cdot t$.

Ist beispielsweise $v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gegeben, dann lautet diese Gleichung: $s(t) = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$.

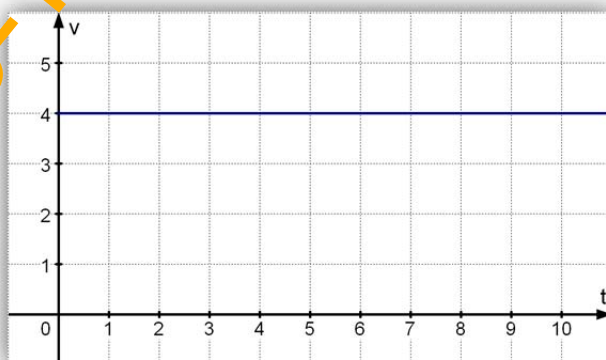
Vergleicht man dies mit $y = 0,5 x$ vergleicht, ahnt man, was nun kommt: Man kann eine solche Funktion in einem Schaubild graphisch darstellen und erhält eine Gerade mit der Steigung 0,5:



Dies ist das **Weg-Zeit-Diagramm** einer gleichförmigen Bewegung. Aus ihm kann man schnell Zusammenhänge ablesen, etwa, daß das Fahrzeug nach 7 Sekunden an der Stelle $s = 3,5 \text{ m}$ angekommen ist (rote gestrichelte Linie). v stellt die **Steigung der Geraden** dar.

Es gibt aber auch ein **v-t-Diagramm**. Dieses gibt an, wie groß zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit ist. Dies ist hier besonders einfach, denn sie ist immer gleich groß.

Ist sie beispielsweise $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, dann ergibt das dieses Diagramm:



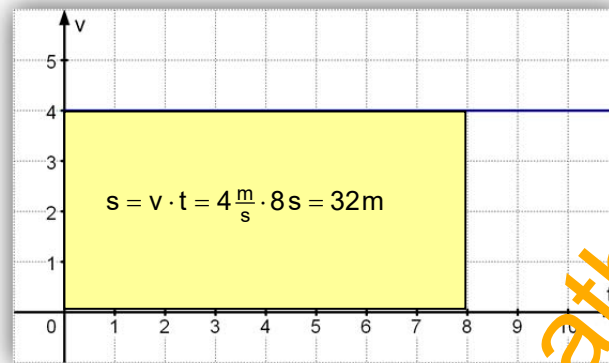
In diesem Diagramm steckt auch die zurückgelegte Wegstrecke verborgen.

Die Gleichung $s = v \cdot t$, kann man nämlich als Flächeninhalt des im folgenden Diagramm eingezeichneten Rechtecks interpretieren kann.

Im v-t-Diagramm kann man also den Weg als Flächeninhalt ablesen!

Diesen Zusammenhang zwischen Weg und Flächeninhalt sollte man sich schon einmal merken!

Er gilt auch bei anderen Bewegungsarten



4.2 Weg-Zeit-Diagramm zu Beispiel 2 von Seite 7

Ein Fahrzeug beschleunigt zuerst und erreicht nach 8 m die Geschwindigkeit $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dann fährt es mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Wir messen die Fahrzeit t erst ab dem Moment, wo das Fahrzeug sich gleichförmig bewegt. Dann lautet die Gleichung zur Berechnung der zurückgelegten Wegstrecke: $s(t) = s_0 + v \cdot t$

mit Zahlen:

$$s(t) = 8 \text{ m} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

Wir stellen diese Gleichung noch etwas um: $s(t) = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 8 \text{ m}$

und vergleichen sie mit $y = 3 \cdot x + 8$

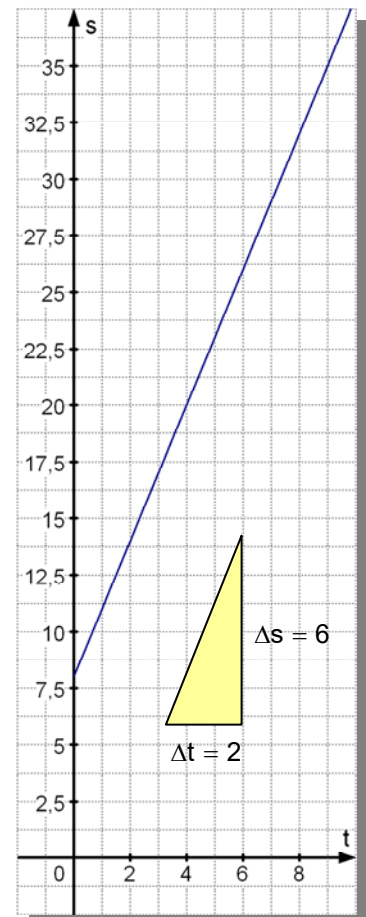
Die graphische Darstellung ergibt als s-t-Diagramm die abgebildete Gerade. Das Absolutglied $s_0 = 8 \text{ m}$ gibt die Startposition an.

Dies ist in diesem Fall der Schnittpunkt mit der s-Achse.

Die Geschwindigkeit gibt wieder die Steigung der Geraden an.

Ein Steigungsdreieck ist eingezeichnet. Man erkennt, dass zur Zeitspanne $\Delta t = 2 \text{ s}$ die Wegstrecke $\Delta s = 6 \text{ m}$ gehört, also zu 1 s genau 3 m.

Bei einer Bewegung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht bei $s = 0$ startet, gehört also eine in s-Richtung verschobene Gerade: $s(t) = s_0 + v \cdot t$



Geändertes Beispiel:

Ein Fahrzeug beschleunigt zuerst $\Delta t = 5 \text{ s}$ lang und erreicht nach 2 m die Geschwindigkeit $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dann fährt es mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Jetzt wird die Fahrt also erst nach 5 s beobachtet. Dann erst beginnt diese Bewegung, vorher wurde von beschleunigt, was uns hier nicht interessiert. Beispielsweise ist das Fahrzeug nach $t = 12 \text{ s}$ erst 7 s lang gleichförmig gefahren. Wir müssen also 5 Sekunden abziehen, dafür aber die 2 m wieder dazu addieren:

Zur Zeit $t = 12 \text{ s}$ hat sich das Fahrzeug 7 s lang gleichförmig bewegt und dabei die

Wegstrecke $\Delta s = v \cdot \Delta t = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7 \text{ s} = 21 \text{ m}$ zurückgelegt.

Es befindet sich also an der Wegmarke $s = 2 \text{ m} + 21 \text{ m} = 23 \text{ m}$.

Allgemein berechnet man den Weg also so:

$$s(t) = s_0 + v \cdot \Delta t \quad \text{bzw.} \quad s(t) = s_0 + v \cdot (t - t_0)$$

oder $s(t) = (s_0 - v \cdot t_0) + v \cdot t$

Mit Zahlen: $s(t) = (2 \text{ m} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s}) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$

d. h.

$$s(t) = -13 \text{ m} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

Dazu muss man angeben, dass diese Gleichung nur für $t \geq 5 \text{ s}$ gilt.

Testen wir unsere Gleichung:

Für $t = 5 \text{ s}$ erhält man: $s(5 \text{ s}) = -13 \text{ m} + 15 \text{ m} = 2 \text{ m}$

Dies war die Startposition nach 5 Sekunden .

Für $t = 12 \text{ s}$: $s(12 \text{ s}) = -13 \text{ m} + 36 \text{ m} = 23 \text{ m}$

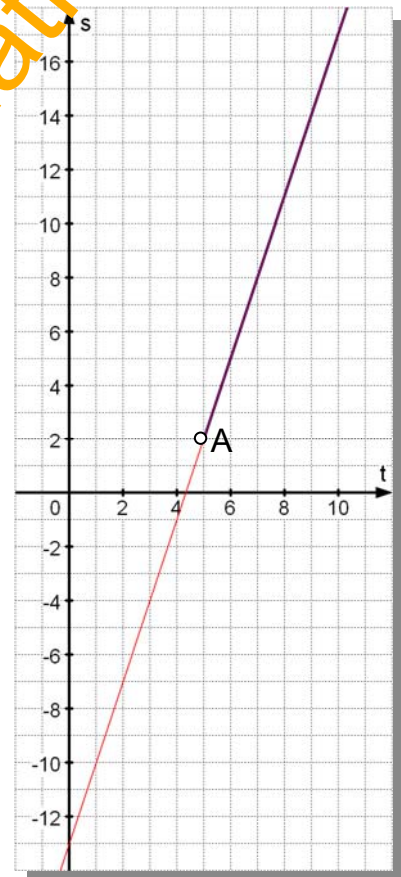
Ohen hätten wir dies ohne Formel berechnet.

Rechts sieht man die zugehörige Gerade mit dem Achsenabschnitt -13 und der Steigung 3 .

Die rote Linie vor der s -Achse bis zum Zustandspunkt A ist nicht realistisch, denn negative Strecken sind sinnlos.

Hier gehört ein Kurvenbogen hinein, der im Ursprung beginnt. Doch dies gehört nicht hier her.

Man könnte die Strecke bis zur s -Achse jedoch so deuten: Wäre das Fahrzeug von Anfang an konstant mit $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gefahren, dann hätte es für dasselbe Endergebnis 13 m vorher starten müssen:



Ein Zustandspunkt besagt, dass dort ein bestimmter Zustand herrscht.

$A(5 \text{ s} | 2 \text{ m})$ besagt also, dass nach 5 s die Stelle $s = 2 \text{ m}$ erreicht worden ist.

Zu Beispiel 1 von Seite 8

Das Fahrzeug mit der Masse m_1 startet an der Stelle $s_1 = 0$ (m) mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Zugleich startet das Fahrzeug mit der Masse m_2 an der Stelle $s_2 = 200$ (m) und fährt in entgegengesetzter Richtung auf m_1 zu. An welcher Stelle und nach welcher Zeit treffen sie aufeinander?

Graphische Lösung:

Die Bewegungsgleichungen lauten

für m_1 : $s(t) = v_1 \cdot t$ d.h. $s(t) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ (1)

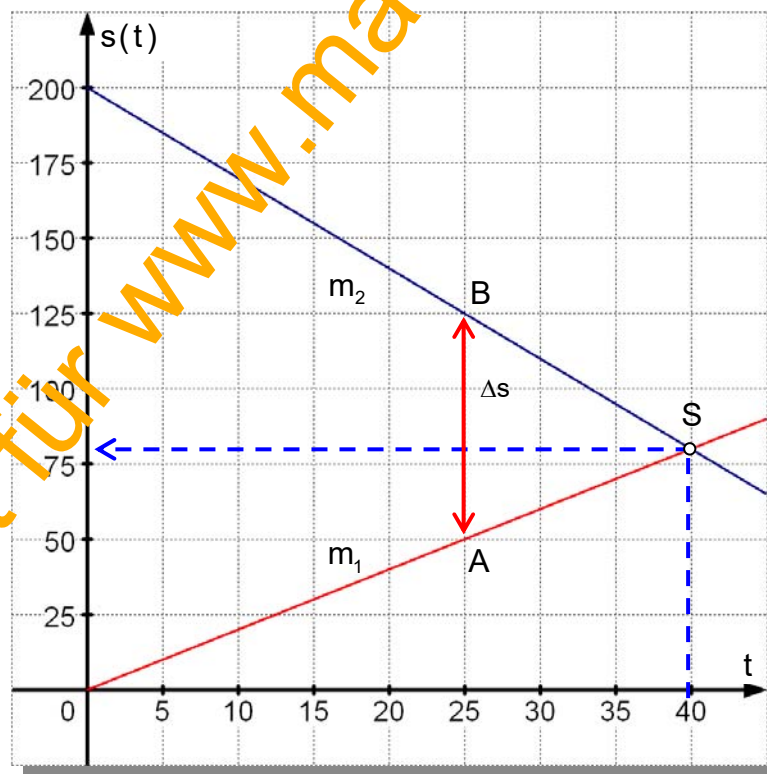
für m_2 : $s(t) = s_2 - v_2 \cdot t$ d.h. $s(t) = 200 - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ (2)

Stellt man die zugehörigen Geraden des Weg-Zeit-Diagramms dar, muß man die Einheiten auf den Achsen geschickt wählen: Man erkennt, dass sich die Geraden im **Zustandspunkt S** schneiden.

Für S gilt: $S(40\text{s}|80\text{m})$

Aus diesem "graphischen Fahrplan" kann man beispielsweise ablesen, wann die Fahrzeuge zusammen treffen, aber auch, dass sie beispielsweise nach 25 s noch $\Delta s = 75\text{m}$ Abstand haben.

Sie befinden sich dann in den Zustandspunkte A und B.



Zu Beispiel 2 von Seite 9

Nun lassen wir die beiden Fahrzeuge zeitversetzt abfahren. Wir sehen bei beiden von einer Beschleunigungsphase beim Start ab und lassen sie gleich mit ihren Geschwindigkeiten losfahren.

Fahrzeug 1 (m_1) starte zur Zeit $t_1 = 0$ im Punkt $s_1 = 0$ mit $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Fahrzeug 2 (m_2) starte zur Zeit $t_2 = 10\text{s}$ im Punkt $s_0 = 810\text{ m}$ mit $v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Beide Fahrzeuge fahren aufeinander zu. Wann und wo treffen sie sich?

Graphische Lösung

Bewegungsgleichung von m_1 : $s = v_1 \cdot t$ für $t \geq 0$

Bewegungsgleichung von m_2 : $s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$ für $t \geq t_2 = 10\text{ s}$

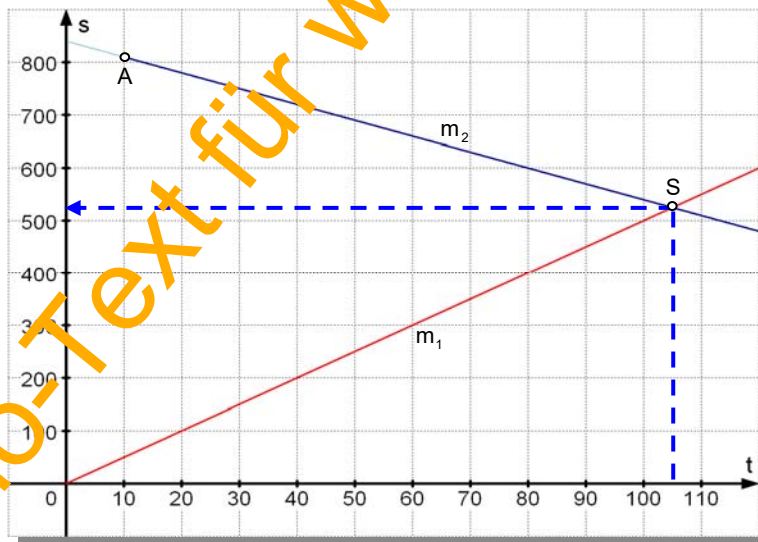
Mit Zahlen: m_1 : $s(t) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ für $t \geq 0$

m_2 : $s(t) = 810\text{m} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 10\text{ s})$ für $t \geq t_2 = 10\text{ s}$

Die zweite Gleichung sollte man durch Ausmultiplizieren noch umformen:

$$s(t) = 840\text{m} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \quad \text{für } t \geq t_2 = 10\text{ s}$$

Hier das Weg-Zeit-Diagramm für beide Bewegungen:



Man beachte, dass m_1 seine Bewegung erst im Zustandspunkt A (10s|810m) beginnt. Seine „Gerade“ fällt, denn sie hat eine negative Steigung (-3), also eine negative Geschwindigkeit: m_2 fährt m_1 entgegen. Sie treffen sich im Schnittpunkt S (105s|525m). Die Wegmarke 525 m ist natürlich hier nicht exakt ablesbar. Doch dazu gab es ja auf Seite 9/10 die Rechnung.

Zu Beispiel 3 von Seite 11

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nach $t_2 = 20 \text{ s}$ startet an derselben Stelle ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein?

Graphische Lösung:

Bewegungsgleichungen

Für m_1 : $s_1 = v_1 \cdot t$ für $t \geq 0$ (1)

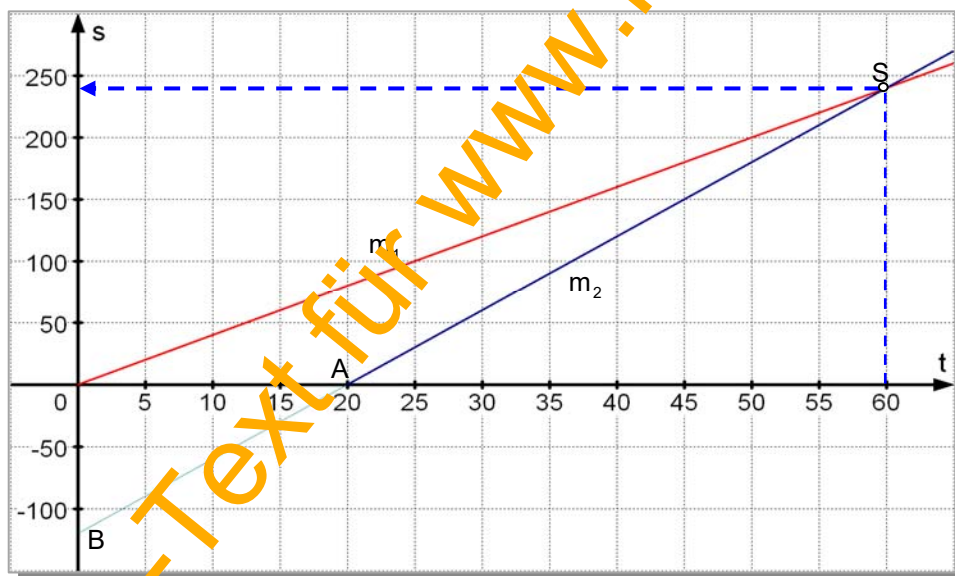
Für m_2 : $s_2 = v_2 \cdot (t - t_2)$ für $t \geq t_2 = 20 \text{ s}$ (2)

Mit Zahlen:

Für m_1 : $s(t) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ für $t \geq 0$ (1)

Für m_2 : $s(t) = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 20 \text{ s})$

d. h. $s(t) = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 120 \text{ m}$ für $t \geq t_2 = 20 \text{ s}$ (2)



Das Weg-Zeit-Diagramm liefert im Schnittpunkt $S(60\text{s}|240\text{m})$ Zeit und Ort des Zusammentreffens.

Es zeigt aber auch den Zustandspunkt $A(20\text{s}|0\text{m})$, wo m_2 startet.

Die Verlängerung (Extrapolation) der m_2 -Geraden bis zum Zustandspunkt $B(0\text{s}|-120\text{m})$ zeigt, dass bei gleichzeitigen Start beider Körper zur Zeit $t = 0$ der Körper m_2 120 m hinter m_1 hätte starten müssen, um dasselbe Zusammentreffen entstehen zu lassen.

Zu Beispiel 4 von Seite 11

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nach $t_2 = 20 \text{ s}$ startet ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in derselben Fahrtrichtung, seine Startposition befindet sich jedoch $s_0 = 600 \text{ m}$ vor m_1 .

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein?

Lösung:

Jetzt ändert sich die Bewegungsgleichung von m_1 , weil dieser beim Start schon einen Vorsprung von $s_0 = 600 \text{ m}$ hat. Also gilt

$$\text{Für } m_1 : \quad s = s_0 + v_1 \cdot t \quad \text{für } t \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Für } m_2 : \quad s = v_2 \cdot (t - t_2) \quad \text{für } t \geq t_2 = 20 \text{ s} \quad (2)$$

Mit Zahlen:

$$\text{Für } m_1 : \quad s_1 = 600 \text{ m} + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t \quad \text{für } t \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Für } m_2 : \quad s_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 20 \text{ s})$$

$$\text{d.h.} \quad s_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 120 \text{ m} \quad \text{für } t \geq t_2 = 20 \text{ s} \quad (2)$$

Zur Interpretation des folgenden s-t-Diagramms muß nach Beispiel 3 nichts mehr gesagt werden.

